$|y| = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ or $y \in \mathbf{R}_+$ d'où $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$.

Conclusion : Pour tout $x \in [-1,1[$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$.

Solution 17 :

1°/a) φ_α est dérivable sur $[0,\pi]$ comme composée et somme des fonctions dérivables sur $]0,\pi[$.

$\forall x \in [0,\pi]$,

$\varphi'_\alpha(x) = \alpha[-\alpha\sin(\alpha x)\sin x + \cos(\alpha x)\cos x] - \alpha\cos(\alpha x)\cos x + \sin(\alpha x)\sin x$

$= -\alpha^2\sin(\alpha x)\sin x + \sin(\alpha x)\sin x = (1-\alpha^2)\sin(\alpha x)\sin x$

Or $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 1-\alpha^2 > 0$ et $0 \le x \le \pi \Rightarrow 0 \le \alpha x \le \pi$

$\Rightarrow \sin(\alpha x) \ge 0$ et $\sin x \ge 0$.

D'où $\forall x \in [0,\pi]$, $\varphi'_\alpha(x) \ge 0$.

x	0		π
$\varphi'_\alpha(x)$	0	$+$	0
$\varphi_\alpha(x)$	0	↗	$\sin(\alpha\pi)$

b) D'après le tableau des variations de φ_α, 0 est un minimum absolu sur $[0,\pi]$ donc $\forall x \in [0,\pi]$, $\varphi_\alpha(x) \ge 0$ et comme $\varphi_\alpha(0) = 0$ et φ_α est strictement croissante sur $[0,\pi]$ donc $\forall x \in [0,\pi]$, $\varphi_\alpha(x) > 0$.

2°/a) • $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{\sin(\alpha x)}{x}}{\dfrac{\sin x}{x}} = \alpha$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

• $\lim\limits_{x\to \pi^-} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin x} = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to \pi^-} \sin(\alpha x) = \sin(\alpha\pi) > 0$ car $0 < \alpha\pi < \pi$ et $\lim\limits_{x\to \pi^-} \sin x = 0^+$.

b) f_α est définie, continue et dérivable sur $]0,\pi[$ et $\forall x \in]0,\pi[$,

$f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha\cos(\alpha x)\sin x - \cos x\sin(\alpha x)}{(\sin x)^2} = \dfrac{\varphi_\alpha(x)}{(\sin x)^2} > 0$